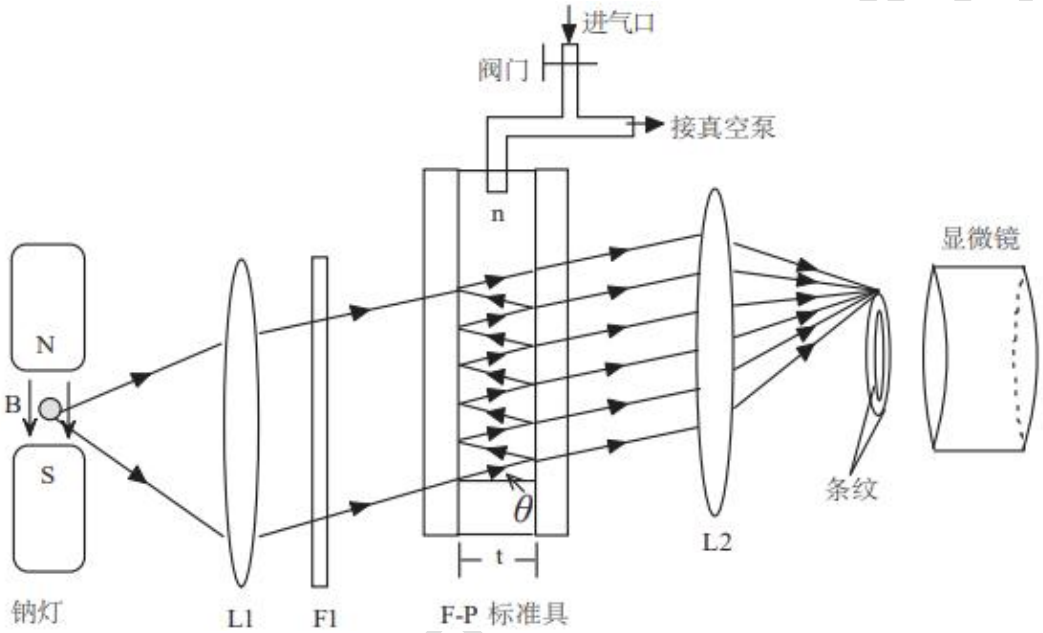
菁英成长课程研究院

2023 夏季•物理竞赛【BAT3-热身赛】试题

承办单位：北斗学友教育集团

1. 法布里—珀罗干涉仪 40

如图所示描绘了一个用来原子光谱的 F-P 干涉仪，其中的核心部件是 F-P 标准具，这个装置包含两个高反射率内表面的玻璃板。这两个玻璃板构成一个干涉腔，光在其中会被不断反射。干涉腔内部的空气折射率可以通过阀门调节。钠光灯发出的光线经过透镜L_1折射后变成平行光，然后经过标准具。已知钠光波长为λ. 玻璃板内表面反射率为R.



（1.1）请求出 F-P 标准具的光强透过率T

（1.2）考虑$R=0.9$, 共振腔长度t可以在 $1.00cm$附近小范围变动。并假设已经由滤光片保证进入 F-P 标准具的光波长在 $589.6nm$附近. 使用 F-P 标准具测量标准大气压下空气的折射率. 将标准具从真空开始逐渐充入空气，直到标准大气压，发现从条纹的中心冒出了 10 个环. 请求出标准大气压下空气的折射率。

（1.3）现加入准直光阑保证$\theta=0$ 第一种分析钠光光谱的方法，是连续改变共振腔的长度 t 并测量透射光强I，作出透射光强I与腔长t的变化关系图，希望能从图中分辨出 $589.6nm$ 附近相距很近的几个发光谱线. 我们知道，发光谱线在$I-t$图上对应的就是透射光强形成的峰，如果$I-t$图上峰的半高宽δt大于 两峰的间距Δt，那么我们认为这两个峰可以分辨，也即，这两个峰对应的波长相距很近的谱线可以分辨.

请计算可以分辨的最小波长差$\Delta\lambda$. 请取空气折射率为 1.00

（1.4）去除准直光阑，此时显微镜中将看到多级同心圆环. 使用$F-P$标准具测量钠黄光谱线的塞曼效应. 如图 2 所示，如果接通钠灯周围线圈的电源，给钠灯施加磁场，那么钠原子的能级将会产生塞曼劈裂. 劈裂的结果是，原先的 $589.6nm$谱线分裂成了四条. 这样，当电源接通时，原先在显微镜中观察到的每一级环形条纹都会劈裂成四条，如图 3 所示. 测量得到条纹的直径为D_1, D_2, D_3, D_4

请根据以上条件，给出用于计算劈裂的能量差$\Delta E_1, \Delta E_2$的公式。设透镜L_2的焦距为f，并f远大于各级亮环直径。

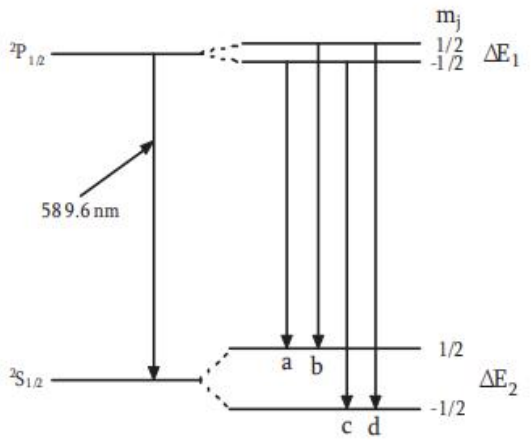


图 2: 钠原子能级的塞曼劈裂

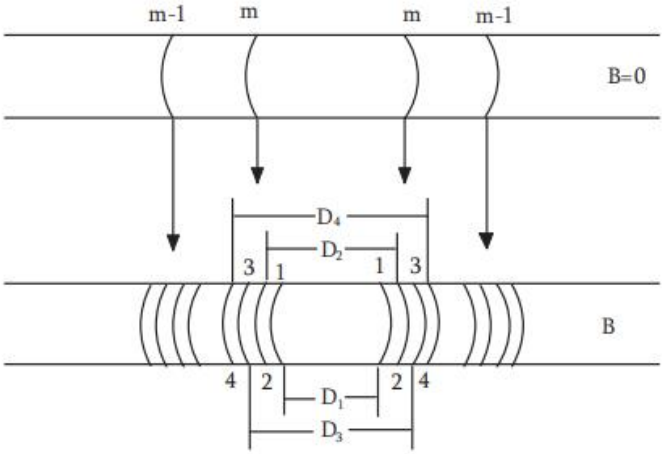


图 3: 加磁场前后显微镜中观察到的图像

2. 简易太阳模型　40

辐射区（是恒星的内部的一层，其中能量向外传输主要借助于辐射扩散和热传导，而不是通过对流。能量以电磁辐射的形式作为光子传播通过辐射区。辐射区中的物质（氢、氦等）十分密集，以至于光子只能在短距离内传播，然后再被另一种粒子吸收或散射，然后逐渐散射到更长的波长。因此，来自太阳中心的伽马射线离开辐射区平均需要 171,000 年的时间。在此范围内，等离子体的温度从核心附近的 1500 万 K 下降到对流区底部的 150 万 K。 当光在介质中传播时能量会逐渐衰减，光子在每处被阻隔不能向前传播的概率正比于介质密度 ρ，比例系数称为不透明度 κ。根据统计物理的结论，光子气体压强与体积无关，光子气体能量密度（单位体积内的能量）$u = \frac{4\sigma}{c}T^4$，假设光子气体辐射压强 $p = aT^4$(a 待求)，其中斯特藩-玻尔兹曼常数 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W \cdot m^2 K^{-4}$，光速 $c = 3.00 \times 10^8 m/s$。太阳内部处处在发生反应释放能量，以 L(r)来表示半径为 r 处从内向外辐射出去的功率。

(2.1)考虑体积为 V 的平衡的光子气体，通过构造微小的卡诺循环给出光子气体辐射压强 p 的表达式

(2.2)推导辐射区中$\frac{dT}{dr}$的表达式，用 κ，ρ，T, r, L(r)及物理常数来表示.

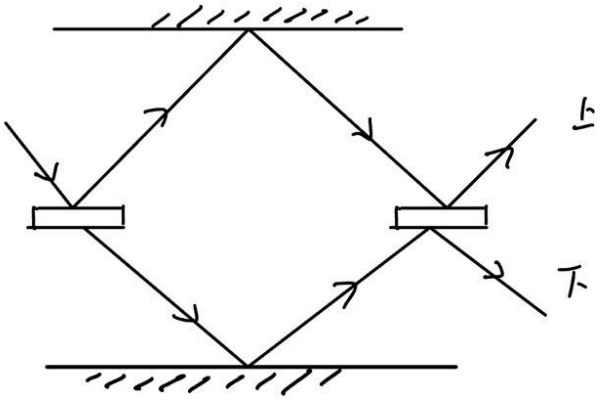
(2.3)现在简化太阳模型，太阳由核，辐射区，以及太阳外层组成，内部的核半径极小，假设太阳外层和地球都是黑体，已知地球平均温度为 15° C，太阳质量$M_0 = 1.99 \times 10^{30} kg$，太阳半径 $R = 6.955 \times 10^8 m$，$\kappa = 4.406 \times 10^{-1} m^2/kg$，太阳密度可视为处处均匀。求出太阳表面温度$T_s$

(2.4)求出太阳内部温度T_i

3.量子信息 40

2022 的诺贝尔物理学奖颁发给了量子信息领域，本题旨在通过一步步引导带领大家初步认识量子信息学。

如图所示，A，B 为两个相同的全反射镜，我们认为反射不会造成任何的相位变化。 C，D 为两块相同的介质块，介质块总的复振幅反射率和透射率分别为 r, t，且两者模长相同。上下两条光路，指的是两个介质块中间的折线光路，的相位差为 0。考虑入射光的振幅为A_0

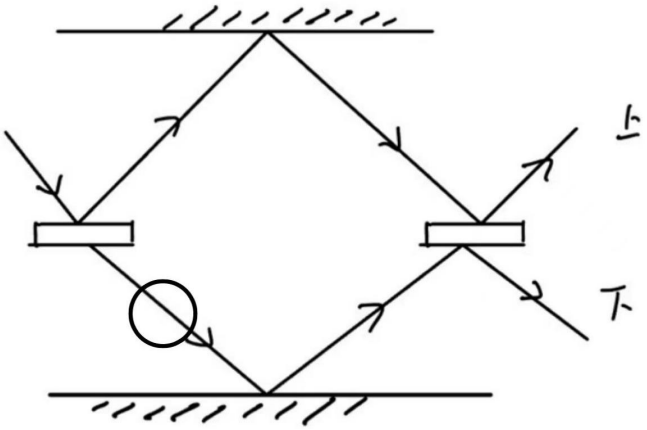


（3.1.1）求下方出射光线振幅大小A_1：求上方出射光线振幅A_2

（3.1.2）设 $r = te^{i(2n\pi + a\pi)}$，其中 n 为任意整数，$0 \le a < 2$，请求出 a 的数值。

（3.2）在图中原本出射光线上下位置分别放置传感器 1，2。当然，光是由光子组成的，如果将光子一个一个放出，每个光子只能被传感器 1，或者 2 所接受，这实际上就是光的粒子性的宏观体现。考虑当时间足够长的时候，那么显然，两个传感器各自记录的光子总量应该符合原来的分布，这便是光的波动性的宏观体现，因为光子分布可以被一个波函数所描述。 请分别求出光子出现在上方和下方的概率P_1, P_2

（3.3）考虑一种炸弹，如果炸弹是好的，那么它完全遮光，且见光就爆炸。如果炸弹是坏的，那么它完全透光，见光不爆炸。显然，根据人们的常识，人们会觉得不可能在炸弹不爆炸的前提下检测出他是好的。但是这个”常识“在量子物理中却被结结实实的推翻了。 如图所示，装置和之前的完全一致，只不过圆圈代表着一颗炸弹。在考虑炸弹可能的光程下，上下两条光路的相位差依然为 0.在实验过程中，我们严格控制只有一个光子入射。



i:如果被检测的炸弹是坏的，请分别求出光子出现在上方和下方的概率P_1, P_2

ii：如果被检测的炸弹是好的，请列举出所有可能的实验结果，及其对应的概率。

iii：如果被检测的炸弹是好的，请求出炸弹没有爆炸就检测出它是好的概率 P iv:如果炸弹库中一共有 N 个好炸弹，且 N 足够大。那么请找出最优检测方法（当然是检测好炸弹），并指出这种方法下平均而言能有多少个好炸弹在不爆炸的情况下检测出来。

（3.4）事实上，上一问的装置还有改进的空间，我们现在使得 r,t 的模长不再相等。

i:我们还是希望可以在炸弹不爆炸的情况下检测出它是好的，请求出上下两条光路的相位差的最小值 $\Delta\phi$

ii：这种情况下，请分别求出光子出现在上方和下方的概率 P_1，我们让实验装置上下两条光路的相位差为你计算得到的最小值：

iii：如果被检测的炸弹是好的，请列举出所有可能的实验结果，及其对应的概率。

iv：如果被检测的炸弹是好的，请求出炸弹没有爆炸就检测出它是好的概率 P v:如果炸弹库中一共有 N 个好炸弹，且 N 足够大。那么请找出最优检测方法（当然是检测好炸弹），并指出这种方法下平均而言能有多少个好炸弹在不爆炸的情况下检测出来。

vi:调节 r 和 t 的模长，指出 r 的模长为多少的时候检测出好炸弹的概率最大，并指出为多少。

vii：评述你的实验方案。

4. 圆环电磁学 60

不考虑重力，考虑空间中有沿着 z 方向的匀强磁场，磁感应强度为 B. 如果，在空间中放置一个刚性的轻圆环。初始时刻环心和坐标原点 O 重合，上面等分固定了 2n 个点电荷。我们这样标定点电荷们：第 i 个点电荷位于极角 $\theta_i = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}i$ 的位置。每个点电荷质量均为 m. 注意，标号从 0 到 2n-1。其中 0 到 n-1 个点电荷带+q 电荷，其余的点电荷带-q。圆环半径为 R, 初始时刻给圆环一个逆时针的角速度 ω_0.

（4.1）请求出 $\omega(\phi)$ 的表达式，其中 ϕ 是 t 时刻相对初始时刻的转角。

（4.2）我们希望让圆环能一直能逆时针旋转，请求出 ω_0 的最小值 ω_c。

（4.3）考虑 $\omega_0 = \omega_c$，求出系统质心在 y 方向运动的范围。

5. 含有金属小球的材料的介电崩溃 60

电解质在外场下其正负电荷分布不再重合进而形成了电偶极矩。本题探讨的是夹杂在介质中的金属小球对电偶极矩的即其等效电容的贡献。

(5.1)考虑点电荷与金属小球的相互作用时可以用电像法求解。请写出像电荷的大小以及位置。已知点电荷的电量为 q，金属小球的半径为 a。

(5.2)基于上一问，现在请利用电像法的思想，求解当一个原本不带电的金属小球放置在匀强外电场下所带上的电偶极矩。

(5.3)现在假设有这样的一种材料：均匀分布了数密度为 n 的金属小球。每个金属小球都没有净电荷，且半径为 a。小球之间为真空。现在对这个材料加上匀强外电场 E_0。由于考虑金属小球的相互作用，，实际上每个小球感受到的电场不是 E_0。现在我们拟采用平均场的方法求解。现在划定一个半径为 R，中心位于 0 点的球形空间，$R \gg a$，但 R 又远小于材料的线度。求这个球形空间之外的作用于 0 点的平均外电场 E_{ext}。并由此求出电极化率 x 。

(5.4)现在有一个平行板电容器，中间是真空，分别求出当电容器孤立、电容器与恒压源相连两个不同条件下，插入该种电介质材料使得电容器的储能的增加或减少量。

(5.5)当上述材料的金属小球数密度 n 逐渐增加时，上述插入平行板后的电容值也逐渐增大并区域无穷。这种现象称为介电崩溃。一般的介电材料在接近介电崩溃的时候其电容值满足负幂指数发散的形式，即：$C \approx C_0(v_c - v)^{-s}$。其中 v 为材料中已经形成导电的体积所占的比例，而v_c为临界比例，s 称为临界指数。估计这种材料的临界比例和临界指数。

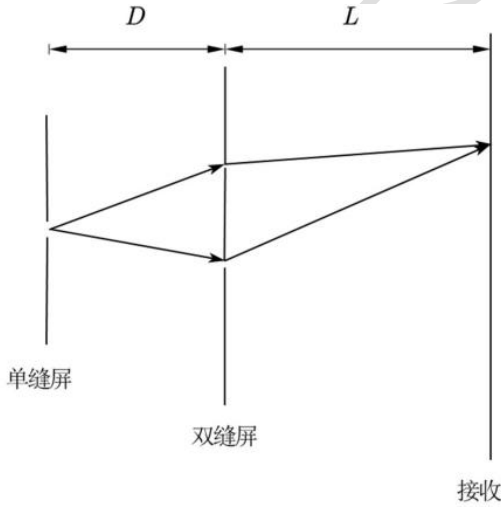
6. 卫星发射以及自动姿态稳定 40

北京时间 6 月 25 日 2 时 9 分，中国在西昌卫星发射中心用长征三号乙运载火箭，成功发射第 46 颗北斗导航卫星。卫星发射事关国家安全，军事情报，还能带动整体科技发展，意义重大。现在我们来考虑有关卫星发射的一些问题。

（6.1）从地球表面用火箭把一个卫星发射到太空中，现代火箭技术一般使用分级喷射。现在假设发射一个三级火箭，即第一第二层为燃料层，第三层为卫星。假设燃料总质量为M，卫星质量为m_0，燃料相对卫星的速度为 u，问当第一第二燃料层的燃料全部喷射完毕时，火箭可以获得多大的速度。（假设先喷射第一燃料层。假设在喷射全过程中推力远大于火箭自身重力，且喷射时间很短）

（6.2）卫星在太空轨道运行时，会不可避免地与太空尘埃发生碰撞，因此卫星会被扰动。现在假设卫星为两个质量为m的太空舱之间由一根长度为 L 的细杆连接而成的系统（太空舱可以视为质点），该卫星围绕地球转动的角速度为Ω，试求卫星在被微扰后的振动角频率。

7. 双缝干涉 40



如图所示是杨氏双缝干涉实验装置。已知双缝间距为d，干涉条纹接收屏到双缝距离为L，已知光源处的单缝到双缝距离相等，单缝屏到双缝屏距离为D，光源波长为$\lambda(L, D \gg \lambda)$。定义干涉条纹衬比度为$\gamma = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}$，其中$I_1$表示光强极大值，$I_2$表示光强极小值。衬比度$\gamma$可以反映条纹的“好坏”。在一些条件的影响下，衬比度并不是全空间处处一致的，它可以被定义为局域的衬比度，这时，衬比度γ是空间位置的函数。衬比度会受到很多因素影响。

(7.1)设单缝宽度为 b，单缝被光源均匀照亮，求衬比度 γ

(7.2)使单缝宽度逐渐增加，当衬比度第一次为 0 时，称此时的b_0为光源极限宽度，求b_0

(7.3)衬比度也会受光源单色性影响，假设光源是由亮度相等的两条谱线 λ ，λ + Δλ 构成 Δλ ≪ λ，求屏上的衬比度函数（选取合适的坐标）