

## 菁英成长课程研究院

### 2023 夏季·物理竞赛【BAT3-热身赛】试题-答案

承办单位：北斗学友教育集团

#### 1. 法布里-珀罗干涉仪

##### 1.1

这是一个简单的多光束干涉问题：

考虑每次的相位差：

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L = \frac{4\pi n t}{\lambda \cos \theta} \#1$$

那么显然各透射光：（只列出前 4 个，然后就很容易看出规律了）

$$U_1 = tt'$$

$$U_2 = tt' r^2 e^{i\delta}$$

$$U_3 = tt' r^4 e^{i2\delta}$$

$$U_4 = tt' r^6 e^{i3\delta}$$

那么考虑无穷数列求和

$$U_T = \frac{tt'}{1-r^2 e^{i\delta}} \#2$$

那么光强就是  $U_T$  和其复共轭的乘积。

同时考虑到斯托克斯关系：

$$r = -r' \#3$$

$$tt' = 1 - r^2 \#4$$

同时注意到反射率  $R$  事实上是光强反射率，所以

$$R = r^2 \#5$$

$$T = \frac{1}{1 + F \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right)} \text{ 其中 } F = \frac{4R}{(1-R)^2} \#6$$

##### 1.2

观察透过率函数的形式我们就可以发现，透射极大的条件是：

$$\frac{\delta}{2} = k\pi \#7$$

所以

$$k = \frac{2nt \cos \theta}{\lambda} \#8$$

根据题设可知冒出 10 个环，说明干涉级次  $k$  增加了 10

$$\Delta k = \frac{2t \cos \theta}{\lambda} \Delta n \text{ 所以}$$

$$\Delta n = 0.00029$$

$$n = 1 + \Delta n = 1.00029 \#10$$

##### 1.3

根据透射极大条件和题目所给数据可得：

$$t = \frac{k\lambda}{2} \#11$$



那么波长相差 $\Delta\lambda$ 的两条谱线在 $I-t$ 图上的间距为

$$\Delta t = \frac{k\Delta\lambda}{2} \#12$$

$$\text{令 } T = \frac{1}{2} t$$

$$\approx \frac{k\lambda}{2} \pm \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{F}}$$

所以半高宽是

$$\delta t = \frac{\lambda}{\pi\sqrt{F}} \#13$$

同时考虑到可以分辨的条件是：

$\Delta t > \delta t$  带入后可以得到：

$$\Delta\lambda > \frac{\lambda^2}{\pi t \sqrt{F}}$$

计算可得

$$\Delta\lambda_{\min} = 5.83 \times 10^{-13} m \#14$$

#### 1.4

注意到

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\theta = \frac{D}{2f}$$

同时结合透射极大条件后可以得到：

$$1 - \frac{D_i^2}{8f^2} = \frac{kc}{2tv_i} \#15$$

观察两幅图可以得到：

$$\nu_a < \nu_b < \nu_c < \nu_d$$

$$D_1 < D_2 < D_3 < D_4$$

因此 1, 2, 3, 4, 分别对应 d, c, b, a.

$$\text{注意到近似 } \frac{1}{\nu_i} - \frac{1}{\nu_j} = \frac{\nu_j - \nu_i}{\nu_0^2}$$

同时

$$k \approx \frac{2t}{\lambda}$$

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda}$$

同时注意到能量关系：  $E = \hbar \nu \ #16$

那么

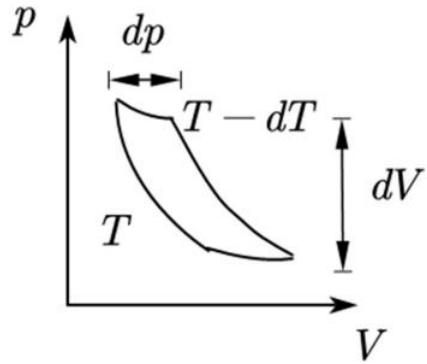
$$\Delta E_1 = \hbar (\nu_b - \nu_a) = \hbar (\nu_d - \nu_c) = \frac{\hbar c D_4^2 - D_3^2}{8f^2} = \frac{\hbar c D_2^2 - D_1^2}{8f^2} \ #17$$

$$\Delta E_2 = \hbar (\nu_c - \nu_a) = \hbar (\nu_d - \nu_b) = \frac{\hbar c D_3^2 - D_2^2}{8f^2} = \frac{\hbar c D_4^2 - D_2^2}{8f^2} \ #18$$

1-16 各 2 分, 17, 18 各 4 分



## 2. 简易太阳模型



如图所示构造一个卡诺循环。

做功:  $dW = dpdV \#1$

考虑热力学第二定律:

$dQ = dU + pdV \#2$

循环效率:

$$\eta = \frac{dW}{dQ} = 1 - \frac{T-dT}{T} = \frac{dT}{T} \#3$$

得到

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\frac{dU}{dV} + p}{T} \#4$$

同时  $U = uV \#5$

所以我们得到:  $p = \frac{4\sigma}{3c} T^4 \#6$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{16\sigma T^3}{3c} \frac{dT}{dr} \#7$$

定义能流密度:  $J(r) = \frac{L}{4\pi r^2}$

然后我们考虑  $N$  个光子走过  $dx$  的距离, 那么有

$dN = -\kappa\rho dx N \#8$

个光子被阻拦

记单个光子能量为  $E$ , 那么

$$J = \frac{dN}{dV} cE \#9$$

所以  $\frac{dJ}{dr} = -\kappa\rho J$

又考虑到辐射压强是由光子传递动量产生的, 根据光子的能动量关系有:

$$p = \frac{J}{c} \frac{dp}{dr} = \frac{1}{c} \frac{dJ}{dr} \#10$$

所以我们得到:  $\frac{dT}{dr} = \frac{-3\kappa\rho}{64\pi\sigma T^3 r^2} L(r) \#11$

通过简单的动力学关系可以得到地球绕太阳轨道半径:

$$r_{SE} = \left( \frac{GM_S T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.495 \times 10^{11} m \#12$$

那么根据热力学第零定律:

$$4\pi R^2 \sigma T_S^4 \frac{\pi r_E^2}{4\pi r_{SE}^2} = 4\pi r_E^2 \sigma T_E^4 \text{ 于} \#13$$



$$\text{是 } T_S = \left(\frac{4r_{SE}^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{4}} T_E = 5972K \#14$$

$$F(r) = F_0 e^{-\kappa \rho r} \#15$$

$$\text{积分后得到: } T_i^4 - T_s^4 = \frac{3}{16} F_0 (1 - e^{-\kappa \rho R}) \#16$$

$$\text{根据能流定义: } F_0 e^{-\kappa \rho R} = \sigma T_s^4 \#17$$

$$\text{计算后得到: } T_i = 1.96 \times 10^8 K \#18$$

1-15 各 2 分, 16, 17 式各 3 分, 18 式 4 分

### 3. 量子信息

下方光路的相位差为 0, 所以  $A_2 = 1$ , #1

考虑到能量守恒, 所以  $A_1 = 0$  #2

$$A_1 = A_0(r^2 + t^2) = 0,$$

$$\text{所以 } a = \frac{1}{2} \#3$$

$$P_2 = 1, P_1 = 0 \#4$$

i: 如果炸弹是坏的, 那么同上一问的情形:  $P_2 = 1, P_1 = 0 \#5$

ii: 如果炸弹是好的, 则可能爆炸

$$P_3 = 0.5 \#6$$

, 所以  $P_1 = 0.25, P_2 = 0.25 \#7$

iii: 即在上方被检测到的情形:  $P = P_1 = 0.25 \#8$

iv: 每次检测时, 将好炸弹跳出, 让剩余炸弹继续被检测, 直至之后所有检测过程中都没有炸弹爆炸。那么平均而言可以挑出

$$\frac{0.25}{0.5+0.25} N = \frac{1}{3} N \#9 \text{ 个好炸弹。}$$

i: 显然这个时候上方光路不可能做到完全消光, 所以我们要能确认好的炸弹而不爆炸, 只能让下方光路完全消光。所以  $\Delta\phi = \pi \#10$

$$\text{ii: } P_2 = 0, P_1 = 1 \#11$$

: iii: 如果炸弹是好的, 那么就可能爆炸  $P_3 = |t|^2$

$$\text{那么 } P_1 = |r|^4, P_2 = |rt|^2 \#12$$

$$\text{iv: } P = P_2 = |rt|^2 \#13$$

v: 平均而言可以挑出:

$$\frac{|rt|^2}{|rt|^2 + |t|^2} N = \frac{|r|^2}{1 + |r|^2} N \text{ 个好炸弹} \#14$$

vi: 那么显然当  $r$  的模长为 1 的时候最大, 为  $\frac{N}{2} \#15$

vii: 注意到: 当  $r$  的模长为 1 的时候,  $t$  的模长为 0. 也就是下方光路几乎不会检测到光。那么检测次数就会趋近于无穷。这本质上是用检测次数的代价换取了更高的检测精度。

1-13 各 2 分, 14 式 4 分, 15 式 5 分, vii 5 分



#### 4. 圆环电磁学

显然系统可以被看做是  $n$  对电偶极子所构成, 那么我们不妨先只考虑一对, 设他们与  $x$  轴的夹角为  $\phi$ . 那么合外力

$$F = 2qBR\dot{\phi}(\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}) \#1$$

合力矩

$$M = -2qv_xBR\cos\phi - 2qv_yBR\sin\phi \#2$$

那么我们要对  $n$  个求和: 考虑到以下的数学关系:

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{\pi i}{n} = \frac{-1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(-\cos\left(\frac{\pi i}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)\right) = -\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2n-1}{2n}\pi\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2n}\right)\right) = \cos\frac{\pi}{2n} \#3$$

如法炮制后可以得到:

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\frac{\pi i}{n} = \sin\frac{\pi}{2n} \#4$$

$$\text{那么 } \sum_{i=0}^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi i}{n} + \phi\right) = \frac{\cos\phi}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

$$\text{如法炮制后可以得到: } \sum_{i=0}^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi i}{n} + \phi\right) = \frac{-\sin\phi}{\sin\frac{\pi}{2n}} \#5$$

于是我们得到:

$$\Sigma F = 2qBR\dot{\phi}\left(\frac{-\sin\phi}{\sin\frac{\pi}{2n}}\hat{x} + \frac{\cos\phi}{\sin\frac{\pi}{2n}}\hat{y}\right) \#5$$

$$\Sigma M = -2qv_xBR\frac{-\sin\phi}{\sin\frac{\pi}{2n}} - 2qv_yBR\frac{\cos\phi}{\sin\frac{\pi}{2n}} \#6$$

于是我们可以得到所有的动力学方程了:

$$2nm\frac{dv_x}{dt} = 2qBR\frac{-\sin\phi}{\sin\frac{\pi}{2n}}\dot{\phi} \#7$$

$$2nm\frac{dv_y}{dt} = 2qBR\frac{\cos\phi}{\sin\frac{\pi}{2n}}\dot{\phi} \#8$$

$$2nmR^2\ddot{\phi} = -2qv_xBR\frac{-\sin\phi}{\sin\frac{\pi}{2n}} - 2qv_yBR\frac{\cos\phi}{\sin\frac{\pi}{2n}} \#9$$

从而我们可以解得:

$$v_x = \frac{qBR}{nmsin\frac{\pi}{2n}}(\cos\phi - 1) \#10$$

$$v_y = \frac{-qBR}{nmsin\frac{\pi}{2n}}\sin\phi \#11$$

以及有:

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{qBR}{nmsin\frac{\pi}{2n}}\right)^2\sin\phi = 0 \ #12$$

考虑到:

$$\ddot{\phi} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega d\omega}{d\phi}$$

于是我们解得:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\left(\frac{qBR}{nmsin\frac{\pi}{2n}}\right)^2(1 - \cos\phi) \ #14$$

$$\text{那么显然: } \omega_c = \frac{2qB}{nmsin\frac{\pi}{2n}} \ #15$$

积分得到:

$$y = \frac{nmR\sin\frac{\pi}{2n}}{qB}(\omega - \omega_0) \ #16$$

那么：

$$y_{min} = -\frac{nmR\sin\frac{\pi}{2n}}{qB} \left[ \omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - \left( \frac{2qB}{nm\sin\frac{\pi}{2n}} \right)^2} \right] \ #17$$

$$y_{max} = 0 \ #18$$

1-15 式各 3 分, 16, 17, 18 式各 5 分; 共计 60 分

## 5. 含有金属小球的材料的介电崩溃

(1)

由电像法可以知道：假设像电荷的绝对值为  $q'$ , 在轴线上  $z$  处, 由电像法的知识可以得到:

$$q' = -\frac{qa}{x}, \ #1$$

$$z = \frac{a^2}{x}, \ #2$$

(2)

如图所示, 均匀电场可以由下图两个放置的电荷让  $R \rightarrow \infty$  得到  
在任意位置的电势为:

$$V_{ext}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\cos\theta}} - \frac{Q}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}} \right), \ #3$$

由泰勒展开的公式:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2, \ #4$$

对上式进行泰勒展开并且精确到  $\left(\frac{r}{R}\right)$  的平方项可以得到:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\cos\theta}} \approx \frac{1}{R} \mp \frac{r}{R^2} \cos\theta, \ #5$$

进而带入之后有:

$$V_{ext}(r, \theta) \approx \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Qr\cos\theta}{R^2}, \ #6$$

由于:

$$r\cos\theta = x \ #7$$

因此当  $R \rightarrow \infty$  时, 上述电势趋于匀强电场产生的电势,

同时利用上一问的结论可知当  $R \rightarrow \infty$  时,  $Q$  和  $-Q$  产生的像电荷趋于一个电偶极子其等效的电偶极矩为:

$$\mathbf{p} = \frac{2a^3Q}{R^2} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \mathbf{E}, \ #8$$

(3)

如果一个小球的电偶极矩为  $p$ , 那么在半径为  $R$  的球形区域内的总电偶极矩为:

$$P_0 = \frac{4\pi R^3}{3} np, \ #9$$

由于这个区域内的总电荷为 0, 那么可以进一步假设电偶极矩是均匀分布的, 因此在区域的内部处处电荷密度为 0, 但区域边界上有面电荷分布, 这个分布产生的效果对内是匀强电场, 对外是电偶极子, 因此由上一问的结论可以得到  $P_0$  在这个球形区域的原点产生的电场为:



$$E_{self} = -\frac{P_0}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \#10$$

又因为：

$$E = E_{self} + E_{ext}, \#11$$

并且还有：

$$p = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_{ext}, \#12$$

因此可以得到：

$$E = \left(1 - \frac{4\pi a^3}{3} n\right) E_{ext}, \#13$$

进而还有极化强度的关系为：

$$\mathcal{P} = np = \frac{4\pi\epsilon_0 n a^3}{\left(1 - \frac{4\pi a^3}{3} n\right)} E_{ext}, \#14$$

因此：

$$\chi = \frac{4\pi n a^3}{\left(1 - \frac{4\pi a^3}{3} n\right)}, \#15$$

(4)

由高斯定理可以得到电容内的电场为：

$$E = \frac{Q}{\epsilon A}, \#16$$

其中：

$$\epsilon = (1 + \chi)\epsilon_0,$$

带入之后有：

$$E = \frac{Q}{(1 + \chi)\epsilon_0 A}, \#17$$

因为电容器储存的能量为：

$$\frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} QEd, \#18$$

因此能量减少，减少量为：

$$-\frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A} \frac{\chi}{1 + \chi}, \#19$$

若电容器外接电池以保证恒定电压，此时储存的能量为：

$$\frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \epsilon_0 A E^2 d (1 + \chi) = (1 + \chi) \frac{\epsilon_0 A}{2d} V^2, \#20$$

可见能量增加，增加量为：

$$\chi \frac{\epsilon_0 A}{2d} V^2, \#21$$

(5)

当小球分布是均匀的时候：

$$E = \frac{Q}{(1 + \chi)\epsilon_0 A}, \#22$$

也即：

$$V = \frac{Qd}{(1 + \chi)\epsilon_0 A},$$

因此得到：

$$C = \frac{(1 + \chi)\epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{1 + \frac{8\pi a^3}{3} n}{1 - \frac{4\pi a^3}{3} n} \approx C_0 \frac{1}{1 - \frac{4\pi a^3}{3} / \frac{4\pi D^3}{3}} = C_0 \frac{1}{1 - v}, \#23$$



故有：

$$v_c = 1, \#24$$

临界指数为：

$$s = 1, \#25$$

1-15 式各 2 分, 16-25 式各 3 分, 共计 60 分

## 6. 卫星发射以及自动姿态稳定

(1) 设第一层燃料质量为  $m_1$

设在  $dt$  时间内, 喷射出燃料  $dm$ , 设火箭速度由  $v$  变为  $(v+dv)$

则有动量守恒  $(m-dm)(v+dv) + dm(v-u) = mv$

得到  $m dv = dm u$

移项积分, 由于质量  $m$  在减小, 因此有  $\int_0^{v_1} \frac{dv}{u} = - \int_{M+m_0}^{M+m_0-m_1} \frac{dm}{m}$

$$\text{得到 } \frac{v_1}{u} = \ln \frac{m_0+M}{m_0+M-m_1} \quad \#1$$

$$\text{在第二次喷射时, 同理可以得到 } \frac{v-v_1}{u} = \ln \frac{m_0+M-m_1}{m_0} \quad 32$$

$$\text{两式相加, 得到 } v = u \ln \frac{M+m_0}{m_0} \quad \#3$$

(2) 卫星的总势能为  $V = -GM_E m \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad \#4$

$$\text{其中 } r_1 = \left( R^2 + RL \cos \varphi + \frac{L^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad r_2 = \left( R^2 - RL \cos \varphi + \frac{L^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \#5$$

将  $r_1$  和  $r_2$  按  $\frac{L}{R}$  的幂展开为级数并取二阶近似

$$\text{得到 } r_1 \approx R \left( 1 + \frac{L}{2R} \cos \varphi + \frac{L^2}{8R^2} \sin^2 \varphi \right) \quad r_2 \approx R \left( 1 - \frac{L}{2R} \cos \varphi + \frac{L^2}{8R^2} \sin^2 \varphi \right) \quad \#6$$

$$\text{因此总势能为 } V = -\frac{GM_E m}{R} \left( 2 - \frac{L^2}{4R^2} + \frac{3L^2}{4R^2} \cos^2 \varphi \right) \quad \#7$$

$$\text{总动能 } E_K = \frac{1}{4} m L^2 \dot{\varphi}^2 \quad \#8$$

$$\text{因此总能量 } E = \frac{1}{4} m L^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{GM_E m}{R} \left( 2 - \frac{L^2}{4R^2} + \frac{3L^2}{4R^2} \cos^2 \varphi \right) \quad \#9$$

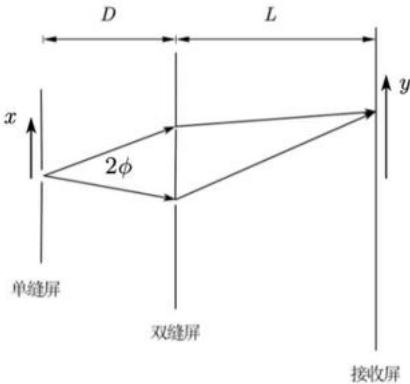
$$\text{不考虑常量, 则保留二阶近似后有 } \frac{1}{4} m L^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{GM_E m}{R} \frac{3L^2}{4R^2} \cos^2 \varphi = \text{const}$$

可见这是简谐运动方程, 注意到有  $GM_E = \Omega^2 R^3$

$$\text{得到振动角频率 } \omega = \sqrt{3} \Omega \quad \#10$$

1-10 式各 4 分

## 7. 双缝干涉



如图所示, 以接收屏中心为原点, 向上为正方向建立坐标 $y$ , 以单缝中心为原点, 向上为正方向建立坐标 $x$

单缝内 $dx$ 段在屏上会产生干涉条纹, 单缝不同位置由于光源相位的随机性, 互相之间在接收屏上形成的干涉条纹是非相干叠加

考虑 $x$ 到 $x + dx$ 的一段单缝

单缝到双缝处相位差为

$$\delta_1 = 2kx \sin \phi \#1$$

双缝到接收屏的相位差为

$$\delta_2 = kds \sin \theta \#2$$

$$L \tan \theta = y \#3$$

在 $y$ 处两“束”光干涉 ( $E_0, I_0$ 作为假设量, 其具体大小不影响我们的结果)

$$E = E_0 (1 + e^{i(\delta_1 + \delta_2)}) \#4$$

$$I = |E|^2 = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( 2kx \sin \phi + \frac{kdy}{L} \right) \right) \#5$$

非相干叠加是光强直接叠加,

总光强

$$I_a = \int_{-b/2}^{b/2} I dx$$

$$I_a = I_0 \left( 2b + \frac{2}{k \sin \phi} \sin(kbs \sin \phi) \cos \frac{kdy}{L} \right) \#6$$

$$I_{1,2} = I_0 \left[ 2b \pm \frac{2}{k \sin \phi} \sin(kbs \sin \phi) \right] \#7$$

$$\sin \phi \approx \tan \phi = \frac{d}{2D}$$

$$\gamma = \left| \frac{\sin \frac{\pi bd}{\lambda D}}{\frac{\pi bd}{\lambda D}} \right| \#8$$

$$b_0 = \frac{\lambda D}{d} \#9$$

不同频率的光在宏观时间内是非相干叠加的,

$$I_a = 2I_0 \left( 2 + \cos \frac{kdy}{L} + \cos \frac{ydk'}{L} \right) \#10$$

$$k' = \frac{2\pi}{\lambda + \Delta \lambda} = \frac{1 - \Delta \lambda}{\lambda} k \#11$$

$$I_a = 2I_0 \left( 2 + 2 \cos \left( \frac{\Delta \lambda kdy}{2\lambda L} \right) \cos \frac{kdy}{L} \right) \#12$$



由于有  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$  这个系数, 后两项是缓变的, 会导致衬比度在全空间不均

$$I_{1,2} = 4I_0 \left( 1 \pm \cos \frac{kdy\Delta\lambda}{L\lambda} \right) \# 13$$

$$\gamma = \cos \frac{\pi dy\Delta\lambda}{\lambda^2 L} \# 14$$

1-10 式各 3 分, 11, 12 式各 2 分, 13, 14 式各 3 分。

