北斗学友科学菁英成长课程研究院
2023秋季·物理竞赛【BAT4-菁联赛】答案

1 波动方程

(1). 受力法:

$$m\ddot{x} = -kx \tag{1}$$

能量法:质点的总机械能守恒:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const \tag{2}$$

上式对时间求导:

$$(m\ddot{x} + kx)\dot{x} = 0 \tag{3}$$

此即 (1) 式。

(2).

(2.1): 取质元 x $x + \Delta x$。其质量为:

$$\Delta m = \lambda \Delta x \tag{4}$$

考虑它两端所受到的 u 方向的力。如图,设两端切线与 x 轴的夹角为 θ_1, θ_2。则由曲线的性质:

$$tan\theta_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \tag{5}$$

$$tan\theta_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \tag{6}$$

由此可列出质元的动力学方程:

$$\Delta m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] \tag{7}$$

将 Δm 除到等式右边得:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{T}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{8}$$

(2.2). 弦的总机械能应该用积分形式写出。先写动能:

$$E_k=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx \tag{9}$$

势能可以从如下角度去考虑:现在的质元的长度和原先的 Δx 差了一个二阶小量,而把质元拉长需要多做的功就是张力 T 乘以他的伸长量,这个功就是它的势能。伸长量为:

$$\Delta x*\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}-\Delta x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Delta x$$

故总势能为:

$$E_p=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \tag{10}$$

总机械能为:

$$E=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx \tag{11}$$

(2.3) 不能通过直接求导获得 (2.1) 中的运动方程。理由如下:守恒的是整根弦的总机械能,每个质元的能量不一定守恒,能量可以在质元之间流动。直接从总能量入手缺少了中间的细节,而波动方程正是弦内部作用的结果,从而无法得出波动方程。

(3).

(3.1): 分 3 个方向算受力。以 1 方向为例,此方向的力来源于 1,2,3 三个面。

$$\begin{aligned}F_1&=\frac{1}{dx_1dx_2dx_3}[(\partial_1T_{11}dx_1)dx_2dx_3+(\partial_2T_{21}dx_2)dx_3dx_1+(\partial_3T_{31}dx_3)dx_1dx_2]\\&=\partial_1T_{11}+\partial_2T_{21}+\partial_3T_{31}\end{aligned} \tag{12}$$

其他两个方向同理:

$$F_2 = \partial_1 T_{12} + \partial_2 T_{22} + \partial_3 T_{32} \tag{13}$$

$$F_3 = \partial_1 T_{13} + \partial_2 T_{23} + \partial_3 T_{33} \tag{14}$$

合在一起写就是:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \\ &= \nabla \cdot T \end{aligned} \tag{15}$$

(3.2) 推导出能流密度的表达式要基于功能原理。设考察的区域范围为 V，则总动能为:

$$E_k = \int_V w d^3 \boldsymbol{r} \tag{16}$$

功能原理可以写为:

$$\frac{dE}{dt} = \int_V (\nabla \cdot T + \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{v} d^3 \boldsymbol{r} \tag{17}$$

上式对任意的 V 都成立，因此有:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (\nabla \cdot T) \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f} \tag{18}$$

对于弦体系，没有外力干扰。$\boldsymbol{f} = 0$

弦的全部作用力都是作用在 x 方向的面上，其中沿 x 方向的力为 T，沿 y 方向的力为 $T\dfrac{\partial u}{\partial x}$. 因此其应力张量可以写为:

$$T = \begin{bmatrix} T & T\dfrac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

而速度矢量可以写为:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

代入计算:

$$\nabla \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$(\nabla \cdot T) \cdot \boldsymbol{v} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{22}$$

动能密度 (2.2) 问中已经求过:

$$w = \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \tag{23}$$

代入 (18) 式:

$$\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{24}$$

即:

$$\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{25}$$

这就是 (8) 式。

(4). 以下两问都是基于守恒流方程的标准解题流程。

(4.1) 先求能量密度。动能密度:

$$\epsilon_k = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \tag{26}$$

再算应力张量。力都作用在 x, y 方向的面上, 每个面的作用力都分为沿着面法向和沿着 z 轴方向。故应力张量可以写为:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \sigma\frac{\partial u}{\partial x} \\ 0 & \sigma & \sigma\frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

速度:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{28}$$

从而：

$$\nabla\cdot T=\begin{bmatrix}0 & 0 & \sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\end{bmatrix}\tag{29}$$

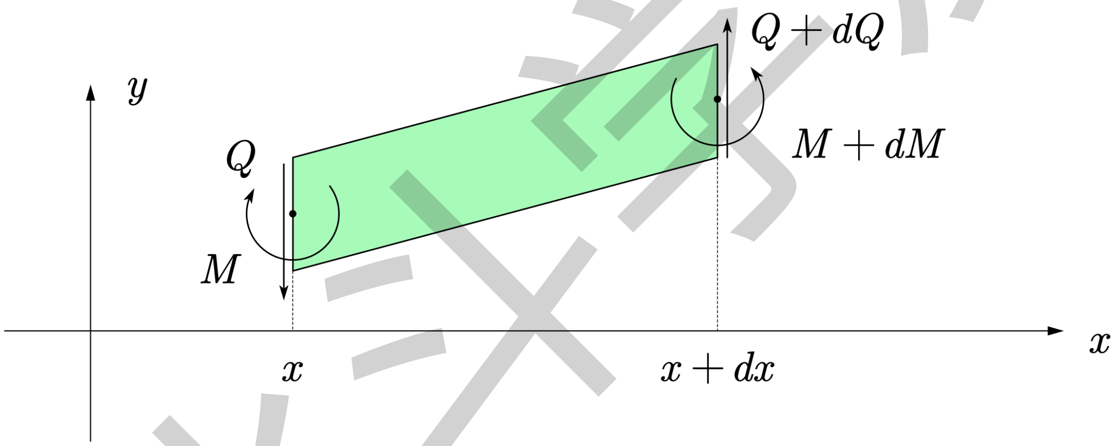
$$\nabla\cdot T\cdot\boldsymbol{v}=\sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\tag{30}$$

代入 (18) 式得：

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\tag{31}$$

(4.2) 梁得横向振动稍显复杂。其横向运动有两个要素，一是扭力矩，这个可以表示成 $u(x,t)$ 及其导数的形式，一是梁的切向力，这个是未知的，待求解。

如图，设梁的切向力为 $Q(x,t)$，扭矩为 $M(x,t)$，方向如图。这种正方向的选取导致当 $\partial_{xx}u>0$ 时，$M>0$。



图中微元力矩平衡，得：

$$Q\cdot dx+dM=0\tag{32}$$

即：

$$Q=-\frac{\partial M}{\partial x}\tag{33}$$

而扭矩可以通过积分获得。设 r 为曲率半径，则在小量近似的条件下，有：

$$r=\frac{1}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\tag{34}$$

$$
\begin{aligned}
M &= \int E\frac{y}{r}dSy \\
&= EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

代入 (33) 式，得：

$$
Q = -EI\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \tag{36}
$$

应力张量：

$$
T = \begin{bmatrix} 0 & -EI\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{37}
$$

速度矢量：

$$
\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{38}
$$

故：

$$
\nabla \cdot T \cdot \boldsymbol{v} = -EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{39}
$$

动能密度：

$$
w = \frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \tag{40}
$$

即可得到波动方程：

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \tag{41}
$$

评分标准：

(1) 问 6 分：(1)(2)(3) 各 2 分

(2.1) 问 10 分：(4)(5)(6)(7)(8) 各 2 分

(2.2) 问 4 分：(9)(10) 各 2 分

(2.3) 问 6 分：说出不能 2 分，解释原因提到“能量在内部的流动”得 4 分

(3.1) 问 8 分：(12)(13)(14)(15) 各 2 分

(3.2) 问 23 分：(16)(18)(19)(20)(21)(22)(23)(25) 各 2 分，(17)4 分，(24)3 分

(4.1) 问 16 分：(26)(28)(29)(30) 各 2 分，(27)(31) 各 4 分

(4.2) 问 27 分：(33)(34)(36)(37)(38)(40) 各 2 分，(39)3 分，(32)(35)(41)4 分

2 光学波包

(1). 波包的复振幅为：

$$U(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int g(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}d^3\boldsymbol{k} \tag{1}$$

其总相因子为：

$$\alpha(\boldsymbol{k})+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega(\boldsymbol{k})t \tag{2}$$

根据相位稳定法，k_0 附近（因为它是 $|g(\boldsymbol{k})|$ 极大值）对总相位求 $\boldsymbol{k}$ 梯度应该是 0. 故：

$$\boldsymbol{r}_0(t)=\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\omega(\boldsymbol{k}_0)\cdot t-\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\alpha(\boldsymbol{k}_0) \tag{3}$$

上式对时间求导就是波包中心的速度：

$$\boldsymbol{v}_g=\nabla_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{k}_0) \tag{4}$$

(2). 相因子按照 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 的一阶展开：

$$\alpha(\boldsymbol{k}_0)+\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\alpha(\boldsymbol{k}_0)\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega(\boldsymbol{k}_0)t-\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\omega(\boldsymbol{k}_0)\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)t \tag{5}$$

利用 (3) 式把和 α 有关的量换成 $\boldsymbol{r}_0$ 可得：

$$(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)+[\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}-\omega(\boldsymbol{k}_0)t+\alpha(\boldsymbol{k}_0)] \tag{6}$$

后一项与 $\boldsymbol{k}$ 无关，因此积分的相对相位之和 $(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 有关，即：

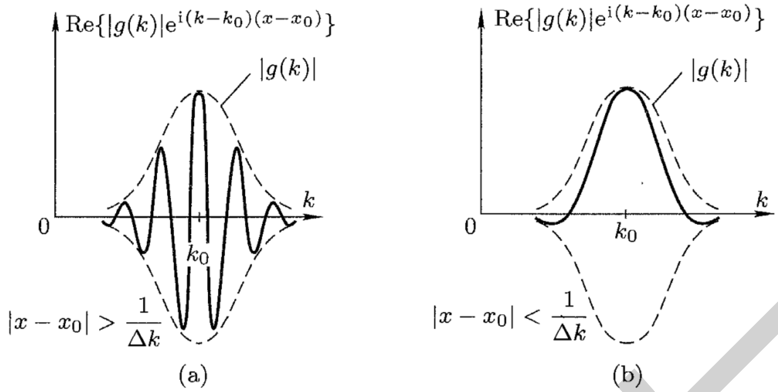
$$|g(\boldsymbol{k})|\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)} \tag{7}$$

才是决定复振幅模方的因子。

我们分别研究其实部和虚部。以实部为例:

$$\mathrm{Re}=|g(\boldsymbol{k})|cos(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \tag{8}$$

当 $\boldsymbol{r}$ 离 $\boldsymbol{r}_0$ 较远的时候，令 $(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)$ 遍历 Δk，则 cos 项的变化很快；反之如果 $\boldsymbol{r}$ 离 $\boldsymbol{r}_0$ 较近的时候，cos 项几乎不变。具体图像如下：



临界情况是，当遍历 Δk 时 $(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 改变 $2\pi\sim 1$ 的数量级，这时 cos 刚好变化一个周期。对虚部也是一样，只是把 cos 变为 sin，其变化趋势是一样的。因此，这时的 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$ 表征了波包在空间中的大小。对三个分量，都有：

$$\begin{aligned}\Delta k_x\cdot\Delta x&\sim 1\\ \Delta k_y\cdot\Delta y&\sim 1\\ \Delta k_z\cdot\Delta z&\sim 1\end{aligned}\tag{9}$$

这是对**下限**的要求。上式左边的数值不可能是远小于 1 的数值。利用德布罗意关系稍微改写即得：

$$\begin{aligned}\Delta p_x\cdot\Delta x&\sim\hbar\\ \Delta p_y\cdot\Delta y&\sim\hbar\\ \Delta p_z\cdot\Delta z&\sim\hbar\end{aligned}\tag{10}$$

此即不确定关系的雏形。

(3). 题文中给了初态的高斯波包，其中每个成分都以不同的频率随时间变化。由此写出任意 t 时刻波包的方程：

$$U(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{a}{\sqrt{2\pi}}}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}dk\tag{11}$$

为了完成这个高斯积分，先将相因子配方：

$$-\left(\frac{a^2}{4}+\frac{\mathrm{i}qt}{2}\right)\cdot\left[k-\left(\frac{a^2k_0+2\mathrm{i}x}{a^2+2\mathrm{i}qt}\right)\right]^2+\frac{\left(\frac{a^2k_0}{2}+\mathrm{i}x\right)^2}{a^2+2\mathrm{i}qt}-\frac{a^2k_0^2}{4} \tag{12}$$

利用题目给的积分公式积分，得出 t 时刻复振幅积分后的形式：

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \frac{a^{1/2}}{(2\pi)^{3/4}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{a^2}{4}+\frac{\mathrm{i}qt}{2}}}\cdot \mathrm{e}^{\left[\frac{\left(\frac{a^2k_0}{2}+\mathrm{i}x\right)^2}{a^2+2\mathrm{i}qt}-\frac{a^2k_0^2}{4}\right]} \\ &= \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{1/4}\frac{1}{\left(a^4+4q^2t^2\right)^{1/4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x}\cdot \mathrm{e}^{\left[-\frac{(x-qk_0t)^2}{a^2+2\mathrm{i}qt}\right]}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\varphi=\left(qk_0^2t+\frac{1}{2}arctan\frac{2qt}{a^2}\right)$ 是与 x 无关的相因子。复振幅的模方：

$$|U(x,t)|^2=\sqrt{\frac{2a^2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4q^2t^2}{a^4}}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{2a^2(x-qk_0t)^2}{a^4+4q^2t^2}} \tag{14}$$

(4). 分析上面波包的函数，可以发现上面的函数还是一个高斯函数，只是零点平移了：

$$x=qk_0t \tag{15}$$

宽度也变了：

$$\Delta x=\frac{a}{2}\sqrt{1+\frac{4q^2t^2}{a^4}} \tag{16}$$

这说明，波包的宽度会随着时间增加而增加。这就是波包的展宽。

(5). 介质分界面的边界条件由麦克斯韦方程决定，它们是：

$$E_{t1}=E_{t2} \tag{17}$$

$$H_{t1}=H_{t2} \tag{18}$$

由于色散关系不是线性关系，折射率并不是定值。设入射波矢为 k 的波在介质中的波矢为 k'：

$$\omega = qk^2 \tag{19}$$

$$\omega = q(k'^2 + K_0^2) \tag{20}$$

故相对折射率：

$$n(k) = \frac{\sqrt{k^2 - K_0^2}}{k} \tag{21}$$

由于是正入射，故不需要分 p, s 分量计算。介质 I 中，由入射反射波，介质 II 中则由透射波。设振幅的反射率，透射率为 r, t：

$$1 + r(k) = t(k) \tag{22}$$

$$1 - r(k) = n(k) \cdot t(k) \tag{23}$$

解得：

$$r(k) = \frac{1 - n(k)}{1 + n(k)} = \frac{k - \sqrt{k^2 - K_0^2}}{k + \sqrt{k^2 - K_0^2}} \tag{24}$$

$$t(k) = \frac{2}{1 + n(k)} = \frac{2k}{k + \sqrt{k^2 - K_0^2}} \tag{25}$$

(6). 上一问已经解决了单色波的反射透射问题，波包本质就是单色波的叠加，对每一个单色波的成分进行反射，透射再叠加就能得到总的复振幅了。

先写出如果没有分界面，波包自由传播的积分形式：

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{K_0}^{\infty} g(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}[kx - \omega(k)t]} k \tag{26}$$

但由于有分界面，我们就把已经传到分界面上的那一部分波包分解为反射波和入射波，使用 $\theta(x)$ 分离各部分解：

$$\begin{aligned} U(x,t) =& \theta(-x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{K_0}^{\infty} g(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}[kx - \omega(k)t]} k \\ &+ \theta(-x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{K_0}^{\infty} g(k) r(k) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[kx + \omega(k)t]} k \\ &+ \theta(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{K_0}^{\infty} g(k) t(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\sqrt{k^2 - K_0^2} x - \omega(k)t]} k \end{aligned} \tag{27}$$

入射，反射，折射波包中心位置：（同样假设 $\alpha(k)$ 是 $g(k)$ 的相位）

$$x_0(t) = \left(\frac{\omega(k)}{k}\right)_{k_0} t - \left(\frac{\alpha(k)}{k}\right)_{k_0} \tag{28}$$

$$x_{0,r}(t) = -\left(\frac{\omega(k)}{k}\right)_{k_0} t + \left(\frac{\alpha(k)}{k}\right)_{k_0} \tag{29}$$

$$x_{0,t}(t) = \frac{\sqrt{k_0^2 - K_0^2}}{k_0}\left[\left(\frac{\omega(k)}{k}\right)_{k_0} t - \left(\frac{\alpha(k)}{k}\right)_{k_0}\right] \tag{30}$$

重写入射波成分和透射波成分的相因子：

$$\alpha(k_0) + k_0 x - \omega(k_0)t + (k - k_0)(x - x_0) \tag{31}$$

$$\alpha(k_0) + \sqrt{k_0^2 - K_0^2}x - \omega(k_0)t + \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - K_0^2}}(k - k_0)(x - x_0) \tag{32}$$

透射部分第二项等价于入射波第二项把 x 换为 $\frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - K_0^2}}x$. 因此，透射波的波包宽度 $(\Delta x)_t$ 和入射波的波包宽度 Δx 的关系为：

$$(\Delta x)_t = \frac{\sqrt{k_0^2 - K_0^2}}{k_0}\Delta x < \Delta x \tag{33}$$

反射波包的宽度和入射波包一样：

$$(\Delta x)_r = \Delta x \tag{34}$$

(7). 按题文的定义，透射率/反射率应该等于复振幅振幅的平方乘以波包宽度之比。代入 (8) 问中的结论可得：

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sqrt{k_0^2 - K_0^2}}{k_0}\left(\frac{2k_0}{k_0 + \sqrt{k_0^2 - K_0^2}}\right)^2 \\ &= \frac{4k_0\sqrt{k_0^2 - K_0^2}}{(k_0 + \sqrt{k_0^2 - K_0^2})^2} \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{k_0 - \sqrt{k_0^2 - K_0^2}}{k_0 + \sqrt{k_0^2 - K_0^2}}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{4k_0\sqrt{k_0^2 - K_0^2}}{(k_0 + \sqrt{k_0^2 - K_0^2})^2} \end{aligned} \tag{36}$$

显然，$R+T=1$。说明粒子不是被反射就是被透射。

(8).$k<K_0$ 的时候会出现一个问题：k' 将是纯虚数：

$$k' = i\sqrt{K_0^2-k^2} \tag{37}$$

这实际上导致了透射波的衰减，也就是形成了隐失波，不再具有沿 x 方向的波动性。

类似地，我们可以写出全反射的情况下的波包函数：

$$\begin{aligned}
U(x,t) =&\theta(-x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{K_0} g(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[kx-\omega(k)t]}k \\
&+\theta(-x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{K_0} g(k)r'(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[kx+\omega(k)t]}k \\
&+\theta(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{K_0} g(k)t'(k)\mathrm{e}^{-\sqrt{K_0^2-k^2}x-\mathrm{i}\omega(k)t}k
\end{aligned} \tag{38}$$

(9). 反射/透射波包被积函数的相位为：

$$\alpha(k)-2\arctan(\frac{\sqrt{K_0^2-k^2}}{k})-kx-\omega(k)t \tag{39}$$

$$\alpha(k)-\arctan(\frac{\sqrt{K_0^2-k^2}}{k})-\omega(k)t \tag{40}$$

注意到透射波包的相位与 x 无关。也就是说，并没有所谓的“透射波包”，它更像“隐失波”。所以我们只能求出反射波包的中心位置。

入射/反射波包中心位置：

$$x_0(t)=\left(\frac{\omega(k)}{k}\right)_{k_0}t-\left(\frac{\alpha(k)}{k}\right)_{k_0} \tag{41}$$

$$x_{0,r}(t)=-\left(\frac{\omega(k)}{k}\right)_{k_0}t+\left(\frac{\alpha(k)}{k}\right)_{k_0}+\frac{2}{\sqrt{K_0^2-k_0^2}} \tag{42}$$

不难发现，当 $x_0=0$ 时，$x_{0,r}>0$。这就说明，全反射时，反射波包的出现有**时间滞后**。滞后的时间为：

$$\tau=\frac{2}{\sqrt{K_0^2-k_0^2}}\Bigg/\left(\frac{\omega(k)}{k}\right)_{k_0}=\frac{2}{q}\frac{1}{k_0\sqrt{K_0^2-k_0^2}} \tag{43}$$

评分标准：

(1) 问 7 分：(2)(4) 各 2 分，(3)3 分

(2) 问 8 分：(6)4 分，(9)(10) 写到一个即给 4 分，等号右边在量纲正确的情况下，可以有非数量级级别的差别。

(3) 问 12 分：(11)2 分，(12)3 分，(13)4 分，(18)3 分

(4) 问 5 分：(15)2 分，(16)3 分

(5) 问 16 分：(17)(18) 各 2 分，(19)(20) 各 1 分，(21)(22)(23)(24)(25) 各 2 分

(6) 问 14 分：(26)2 分，(27)4 分，(28)(29)(30)(31)(32)(34) 各 1 分，(33)2 分

(7) 问 4 分：(35)(36) 各 2 分

(8) 问 6 分：(37)2 分，(38)4 分

(9) 问 8 分：(39)(40) 各 1 分，(41)(42)(43) 各 2 分

3 自行车

（1）质心与主杆中点的距离

$$\Delta z = \frac{2mh}{M+2m}. \tag{1}$$

对过主杆中点且垂直于自行车平面的轴，转动惯量为

$$I_1' = \frac{1}{12}ML^2 + mr^2 + 2m(h^2 + \frac{1}{4}L^2). \tag{2}$$

对过主杆中点且与主杆平行的轴（即与主杆重合的轴），转动惯量为

$$I_2' = \frac{1}{2}mr^2 + 2mh^2. \tag{3}$$

对过主杆中点且垂直于前两根轴的轴，转动惯量为

$$I_3' = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}mL^2. \tag{4}$$

所以绕题述的三根轴转动惯量分别是

$$\begin{cases} I_1 = I_1' - (M+2m)\Delta z^2 = \dfrac{1}{12}ML^2 + m(r^2 + 2h^2 + \dfrac{1}{2}L^2) - \dfrac{4m^2h^2}{M+2m}, \\ I_2 = I_2' - (M+2m)\Delta z^2 = \dfrac{1}{2}mr^2 + \dfrac{2mMh^2}{M+2m}, \\ I_3 = I_3' = \dfrac{1}{12}ML^2 + \dfrac{1}{2}m(r^2 + L^2). \end{cases} \tag{5}$$

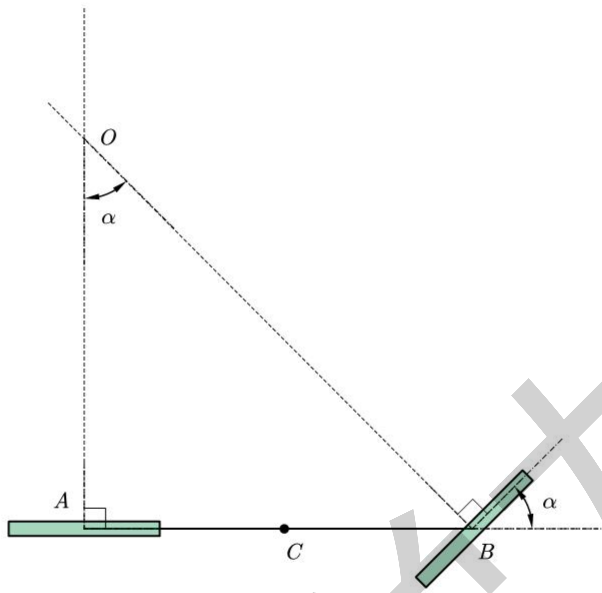


图 1: 自行车

（2）如图 1，从正上方俯视，车身整体绕着一根竖直轴旋转，这根竖直轴与车轮的连线垂直于车轮所在平面。A, B 分别是两车轮的圆心，C 是主杆的中点，O 表示前述的这根竖直轴。经过简单的几何推导，可以得出：

$$\begin{cases} |OA| = L\cot\alpha \\ |OB| = L\csc\alpha \\ |OC| = L\sqrt{\cot^2\alpha + \dfrac{1}{4}} \end{cases} \tag{6}$$

所以，每转一圈，后轮中心、前轮中心、主杆中点行进的距离分别为

$$\begin{cases} 2\pi|OA| = 2\pi L\cot\alpha \\ 2\pi|OB| = 2\pi L\csc\alpha \\ 2\pi|OC| = 2\pi L\sqrt{\cot^2\alpha + \dfrac{1}{4}} \end{cases} \tag{7}$$

（3）如图 2假设主杆中点受到的外力为 $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{e}_x + F_y\boldsymbol{e}_y$，在主杆中点施加的外力矩为 $\boldsymbol{\tau} = \tau\boldsymbol{e}_x$。后轮受到的摩擦力为 $\boldsymbol{f}_1 = f_1\boldsymbol{e}_y$，前轮受到的摩擦力为

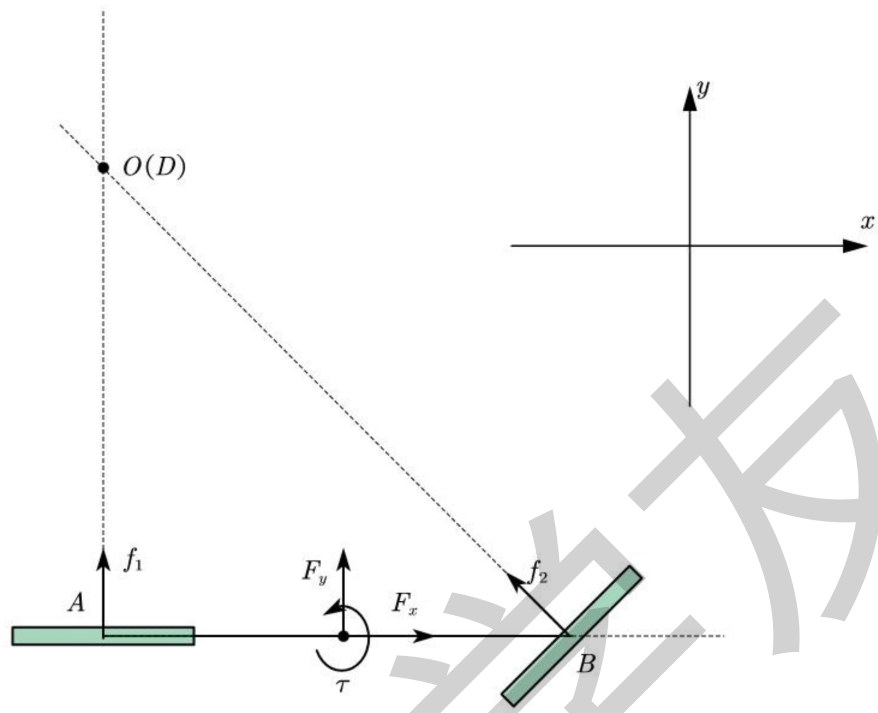


图 2: 自行车

$\boldsymbol{f}_2 = f_2(-\sin\alpha\boldsymbol{e}_x + \cos\alpha\boldsymbol{e}_y)$。由质心运动定理,

$$\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{F} = 3m\Omega^2\overrightarrow{CO} \tag{8}$$

写成分量式即

$$\begin{cases} F_x - f_2\sin\alpha = -\dfrac{1}{2}(M+2m)\Omega^2 L \\ F_y + f_1 + f_2\cos\alpha = (M+2m)\Omega^2 L\cot\alpha \end{cases} \tag{9}$$

记竖直轴 O 与地面的交点为 D。由简单的几何关系:

$$\begin{cases} \overrightarrow{DA} = -L\cot\alpha\boldsymbol{e}_y + r\boldsymbol{e}_z \\ \overrightarrow{DB} = L\boldsymbol{e}_x - L\cot\alpha\boldsymbol{e}_y + r\boldsymbol{e}_z \\ \overrightarrow{DC} = \dfrac{1}{2}L\boldsymbol{e}_x - L\cot\alpha\boldsymbol{e}_y + (h+r)\boldsymbol{e}_z \end{cases} \tag{10}$$

后轮质心的速度为

$$\boldsymbol{v}_1 = \Omega L \cot\alpha \boldsymbol{e}_x \tag{11}$$

前轮质心的速度为

$$\boldsymbol{v}_2 = \Omega L \cot\alpha \boldsymbol{e}_x + \Omega L \boldsymbol{e}_y \tag{12}$$

主杆中点的速度为

$$\boldsymbol{v}_3 = \Omega L \cot\alpha \boldsymbol{e}_x + \frac{1}{2}\Omega L \boldsymbol{e}_y \tag{13}$$

后轮在随后轮质心平动的参考系中，转动角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \Omega \boldsymbol{e}_z + \frac{|\boldsymbol{v}_1|}{r}\boldsymbol{e}_y = \Omega(\frac{L\cot\alpha}{r}\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z) \tag{14}$$

前轮在随前轮质心平动的参考系中，转动角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \Omega \boldsymbol{e}_z + \frac{|\boldsymbol{v}_2|}{r}\frac{\overrightarrow{BO}}{|\overrightarrow{BO}|} = \Omega(-\frac{L}{r}\boldsymbol{e}_x + \frac{L\cot\alpha}{r}\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z) \tag{15}$$

主杆在随主杆质心平动的参考系中，转动角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \Omega \boldsymbol{e}_z \tag{16}$$

所以，相对于 D 点，自行车的角动量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} = \ & m\overrightarrow{DA}\times\boldsymbol{v}_1 + m\overrightarrow{DB}\times\boldsymbol{v}_2 + M\overrightarrow{DC}\times\boldsymbol{v}_3 \\ & + \frac{1}{12}ML^2\boldsymbol{\omega}_3 + \frac{1}{2}mr^2(\boldsymbol{\omega}_1 - \Omega\boldsymbol{e}_z) + \frac{1}{4}mr^2\Omega\boldsymbol{e}_z + \frac{1}{2}mr^2(\boldsymbol{\omega}_2 - \Omega\boldsymbol{e}_z) + \frac{1}{4}mr^2\Omega\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{17}$$

为方便计算，将 $L = 3r, h = 2r, M = m$ 代入计算，得到：

$$\boldsymbol{L} = -9mr^2\Omega\boldsymbol{e}_x + 18mr^2\Omega\cot\alpha\boldsymbol{e}_y + mr^2\Omega(\frac{25}{2} + 27\cot^2\alpha)\boldsymbol{e}_z \tag{18}$$

列出对 D 点的角动量定理方程：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} &= \Omega\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{L} \\ &= \boldsymbol{\tau} + \overrightarrow{DC}\times\boldsymbol{F} \\ &= 3rF_x\boldsymbol{e}_y - 3rF_y\boldsymbol{e}_x + (\frac{3}{2}rF_y + 3rF_x\cot\alpha + \tau)\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{19}$$

写成分量式得：

$$\begin{cases} -3rF_y = -18mr^2\Omega^2\cot\alpha \\ 3rF_x = -9mr^2\Omega^2 \\ \dfrac{3}{2}rF_y + 3rF_x\cot\alpha + \tau = 0 \end{cases} \tag{20}$$

由 (9) 和 (20) 得

$$\begin{cases} F_x = -3mr\Omega^2 \\ F_y = 6mr\Omega^2\cot\alpha \\ \tau = 0 \end{cases} \tag{21}$$

此即待求的物理量。

评分标准：第（1）小题 10 分，第（2）小题 4 分，第（3）小题 36 分。(1)-(17) 式各 2 分，(18)-(21) 式各 4 分。

4 霍尔效应的副效应

（1）显然，附加项为电磁场的做功项。

$$C = \frac{q}{T}\boldsymbol{J}_n\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = \frac{q}{T}\boldsymbol{J}_n\cdot\boldsymbol{E}. \tag{1}$$

（2）由题意，

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_Q = L_{11}\nabla\dfrac{1}{T} + L_{12}\left(-\dfrac{\nabla\mu}{T}+\dfrac{q}{T}\boldsymbol{E}\right), \\ 0 = L_{21}\nabla\dfrac{1}{T} + L_{22}\left(-\dfrac{\nabla\mu}{T}+\dfrac{q}{T}\boldsymbol{E}\right). \end{cases} \tag{2}$$

将 $\nabla\mu$ 项和 $\boldsymbol{E}$ 项消去得

$$\boldsymbol{J}_Q = \frac{L_{11}L_{22}-L_{12}L_{21}}{L_{22}}\nabla\frac{1}{T} = -\frac{L_{11}L_{22}-L_{12}L_{21}}{L_{22}T^2}\nabla T. \tag{3}$$

所以

$$\kappa = \frac{L_{11}L_{22}-L_{12}L_{21}}{L_{22}T^2}. \tag{4}$$

(3) 由题意，$\nabla T = 0$ 且 $\nabla\mu = 0$。所以 $\boldsymbol{J}_n = \frac{qL_{22}}{T}\boldsymbol{E}$。又因电流密度为 $\boldsymbol{J}_e = q\boldsymbol{J}_n$，故

$$\boldsymbol{J}_e = \frac{q^2L_{22}}{T}\boldsymbol{E}. \tag{5}$$

即有

$$\sigma = \frac{q^2 L_{22}}{T}. \tag{6}$$

（4）由题意

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_Q = L_{11}\nabla\frac{1}{T} + L_{12}\left(-\frac{\nabla\mu}{T} + \frac{q}{T}\boldsymbol{E}\right), \\ \boldsymbol{J}_n = L_{21}\nabla\frac{1}{T} + L_{22}\left(-\frac{\nabla\mu}{T} + \frac{q}{T}\boldsymbol{E}\right). \end{cases} \tag{7}$$

将 $\nabla\mu$ 项和 $\boldsymbol{E}$ 项消去得到：

$$\boldsymbol{J}_Q = -\kappa\nabla T + \frac{L_{12}}{L_{22}}\boldsymbol{J}_n = -\kappa\nabla T + \frac{L_{12}}{qL_{22}}\boldsymbol{J}_e. \tag{8}$$

于是得

$$\pi = \frac{L_{12}}{qL_{22}}. \tag{9}$$

所以有

$$\begin{cases} L_{11} = \kappa T^2 + \sigma\pi^2 T, \\ L_{12} = L_{21} = \frac{\sigma\pi T}{q}, \\ L_{22} = \frac{\sigma T}{q^2}. \end{cases} \tag{10}$$

（5）写出分量式，可得：

$$\begin{cases} J_{Qx} = -\frac{L_{11}}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{L_{12}q}{T}\left(E_x + \frac{J_{ny}}{n}B\right), \\ J_{Qy} = -\frac{L_{11}}{T^2}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{L_{12}q}{T}\left(E_y - \frac{J_{nx}}{n}B\right), \\ J_{nx} = -\frac{L_{21}}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{L_{22}q}{T}\left(E_x + \frac{J_{ny}}{n}B\right), \\ J_{ny} = -\frac{L_{21}}{T^2}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{L_{22}q}{T}\left(E_y - \frac{J_{nx}}{n}B\right). \end{cases} \tag{11}$$

由 $J_{Qy} = 0, J_{ny} = 0$。对 11近似计算得：

$$E_y = \frac{BqL_{22}}{nT}E_x - \frac{BL_{21}}{nT^2}\frac{\partial T}{\partial x}. \tag{12}$$

又 $U_H = E_y b$，所以

$$Q = \frac{\sigma\pi b}{nqT}. \tag{13}$$

（6）由题意，$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$。负载满足

$$E_x d + RqJ_{nx}bt = 0. \tag{14}$$

由此解出

$$\begin{cases} J_{Qy} = q\pi J_{ny} - \kappa\dfrac{\partial T}{\partial y}, \\ J_{nx} = \dfrac{\sigma dBJ_{ny}}{nq(d+Rbt\sigma)}. \end{cases} \tag{15}$$

做功功率为

$$P = (qJ_{nx}bt)^2R = \frac{\sigma^2d^2b^2t^2B^2J_{ny}^2R}{n^2(d+Rbt\sigma)^2}. \tag{16}$$

评分标准：(1)、(10)、(11)、(13)、(14)、(15)、(16) 各 4 分；(2)、(6)、(7)、(8)、(9)、(12) 各 2 分。

5　成像系统中的衍射

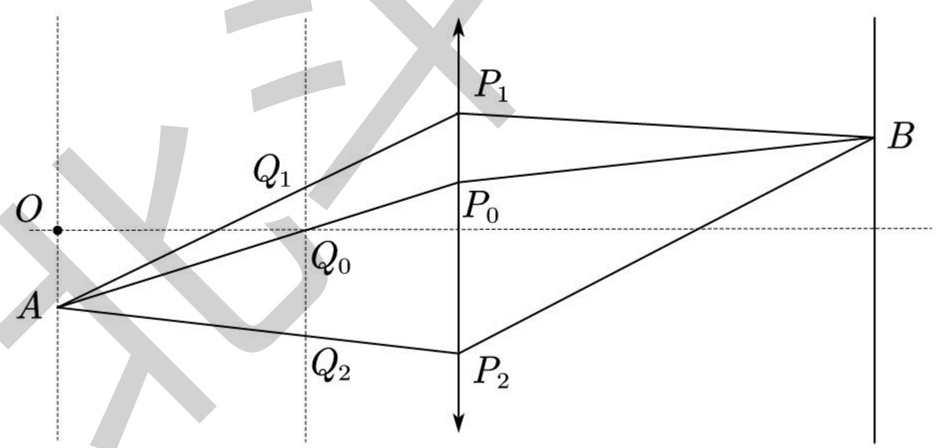


图 3: 光路

（1）基尔霍夫衍射积分公式：

$$U=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\int_{\Sigma_0}U(\Sigma_0)F(\theta,\theta_0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma \tag{1}$$

其中 Σ_0 为衍射屏。由成像公式易得，成像的像距为

$$v=\frac{uf}{u-f} \tag{2}$$

所以成像的放大率为 $M=-\frac{v}{u}=-\frac{f}{u-f}$。假设衍射屏上的点用坐标 x',y' 来表示，像屏上的点用 x,y 来表示。见图 3，其中 A 点和 B 点分别是物平面上和像平面上的共轭点，图中标出了三条成像光线，其中 Q_0 恰好是衍射屏与主光轴的交点。由成像的等光程性，$AQ_1P_1B,AQ_2P_2B,AQ_0P_0B$ 光程均相等，即

$$L(AQ_1P_1B)=L(AQ_2P_2B)=L(AQ_0P_0B) \tag{3}$$

所以，对于从衍射屏上 $Q(x',y')$ 点经凸透镜上 P 点到像屏上 $B(x,y)$ 点的光程，我们可以用如下方法计算：

$$L(QPB)=L(AQPB)-|AQ|=L(AQ_0P_0B)-|AQ| \tag{4}$$

衍射屏上的波前是点光源发出的波前。忽略掉点光源的强度随距离的衰减，衍射屏上的波前为

$$U(x',y')=\exp\left[\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{z^2+x'^2+y'^2}\right]\approx\exp\left[\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}z(1+\frac{x'^2+y'^2}{2z^2})\right] \tag{5}$$

经过衍射屏，上述波前应乘以一个屏函数 $t(x',y')$。所以衍射积分公式可以写为

$$U(x,y)=C\int t(x',y')\exp\left[\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}z(1+\frac{x'^2+y'^2}{2z^2})\right]\exp\left[\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}L(QPB)\right]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{6}$$

其中将无关的常数都吸收到常数 C 中。$L(AQ_0P_0B)$ 是一个跟 x',y' 无关的函数，记为 $L_0(x,y)$。由放大率的定义得 A 的坐标为 $A(\frac{x}{M},\frac{y}{M})$。所以

$$|AQ|=\sqrt{z^2+\left(\frac{x}{M}-x'\right)^2+\left(\frac{y}{M}-y'\right)^2}\approx z+\frac{\left(\frac{x}{M}-x'\right)^2+\left(\frac{y}{M}-y'\right)^2}{2z} \tag{7}$$

所以式 (6) 可以写为

$$U(x,y)=C\exp\left[\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}L_0(x,y)+\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x^2+y^2}{2M^2z}\right]\int t(x',y')\exp\left[\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x'x+y'y}{Mz}\right]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{8}$$

对比标准的平行光夫琅禾费衍射场积分表达式

$$U(x,y)=CP(x,y)\int t(x',y')\mathrm{e}^{-x'\sin\alpha-y'\sin\gamma}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{9}$$

可知式 (8) 相当于平行光的夫琅禾费衍射场。衍射角为

$$\sin\alpha=-\frac{x}{Mz},\quad \sin\gamma=-\frac{y}{Mz} \tag{10}$$

对平行光的圆孔夫琅禾费衍射，主极强的半角宽为 $\Delta\theta=1.22\frac{\lambda}{D}$。所以圆斑的半径为

$$r=1.22\frac{\lambda}{D}|M|z=1.22\frac{\lambda f}{z(u-f)} \tag{11}$$

（2）接第（1）小题，我们已经知道了像屏上的光强与平行光夫琅禾费衍射可以一一对应。但在这一小题中，点光源的位置移动了，因此衍射屏上的波前为

$$U(x',y')=\exp\left[\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{z^2+x'^2+(y'+h)^2}\right]\approx\exp\left[\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}z+\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x'^2+(y'+h)^2}{2z}\right] \tag{12}$$

仿照第（1）小题的推导，可知像屏上的衍射积分公式可以写为

$$U(x,y)=C\exp\left[\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}L_0(x,y)+\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x^2+y^2}{2M^2z}\right]\int t(x',y')\exp\left[\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x'x+y'(y+Mh)}{Mz}\right]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{13}$$

这里 $t(x',y')$ 为光栅的屏函数。完成此积分（或也可直接根据光栅的衍射光强公式）得到

$$i(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\dfrac{\sin\frac{\pi dh}{\lambda z}}{\sin N\frac{\pi dh}{\lambda z}}\right)^2, & \text{if } \alpha=0\\ 0, & \text{if } \alpha\neq 0\end{cases} \tag{14}$$

其中 $\alpha=\frac{\pi d}{\lambda}\frac{x(u-f)}{zf},\gamma=-\frac{\pi d}{\lambda}\frac{h}{z}+\frac{y(u-f)}{zf}$。用狄拉克 δ 函数表示也可得分：

$$i(x,y)=\left(\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\frac{\sin\frac{\pi dh}{\lambda z}}{\sin N\frac{\pi dh}{\lambda z}}\right)^2\frac{\delta(x)}{\delta(0)} \tag{15}$$

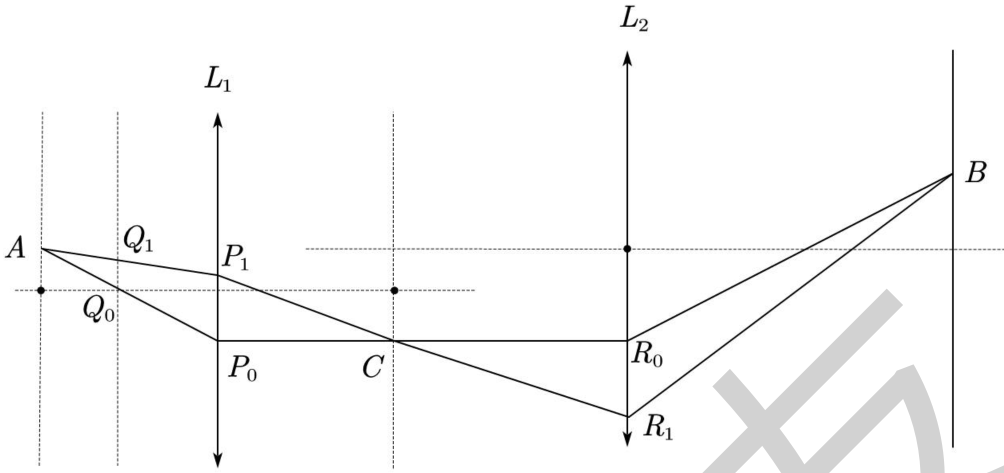


图 4: 光路

（3）如图 4: 第一次，经过透镜 L_1 成像，像距显然为 $2f$，放大率为 -1。于是，经过透镜 L_2 成像的时候，物距为 $3f$。设第二次成像的像距为 v，则

$$\frac{1}{3f}+\frac{1}{v}=\frac{1}{2f} \tag{16}$$

于是

$$v=6f \tag{17}$$

所以第二次成像放大率为 -2。点光源成的像在像屏上位置为 $x=0,y=2b$。两次成像的联合放大率为 $M=2$。所以物平面上 (x_0,y_0) 点对应于像平面上 $(2x_0,2b+2y_0)$。所以像屏上 $B(x,y)$ 点对应于物平面上 $A(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y-b)$。故衍射积分公式可以写为

$$U(x,y)=C\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x'^2+y'^2}{2f}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}[L(AQ_0P_0R_0B)-|AQ|]}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{18}$$

注意到 $|AQ|\approx f+\frac{(x'-x/2)^2+(y'-y/2+b)^2}{2f}$。将无关的关于 x,y 的函数记作 $C(x,y)$。于是

$$U(x,y)=C(x,y)\int t(x',y')\exp\left[\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x'x+y'(y-2b)}{2f}\right]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{19}$$

因此很容易得出结论，圆斑的半径为

$$r=2.44\frac{\lambda}{D}f \tag{20}$$

（4）直接利用上一小题得到的积分公式，可知

$$i(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\dfrac{\sin\frac{\pi d}{\lambda}\frac{b}{f}}{\sin N\frac{\pi d}{\lambda}\frac{b}{f}}\right)^2, & \text{if } \alpha=0\\ 0, & \text{if } \alpha\neq 0\end{cases}\tag{21}$$

其中 $\alpha=-\frac{\pi d}{\lambda}\frac{x}{2f},\gamma=-\frac{\pi d}{\lambda}\frac{y-2b}{2f}$。用狄拉克 δ 函数表示也可得分。

（5）根据前面的结果，可得：

$$i(x,y)=\begin{cases}\left[\beta\left(\dfrac{\sin N\gamma_1}{N\sin\gamma_1}\right)^2+\left(\dfrac{\sin N\gamma_2}{N\sin\gamma_2}\right)^2\right]\Big/\left[\beta\left(\dfrac{\sin N\frac{\pi d}{\lambda_1}\frac{b}{f}}{N\sin\frac{\pi d}{\lambda_1}\frac{b}{f}}\right)^2+\left(\dfrac{\sin N\frac{\pi d}{\lambda_2}\frac{b}{f}}{N\sin\frac{\pi d}{\lambda_2}\frac{b}{f}}\right)^2\right], & \text{if } x=0\\ 0, & \text{if } x\neq 0\end{cases}\tag{22}$$

其中 $\gamma_i=-\frac{\pi d}{\lambda_i}\frac{y-2b}{2f}(i=1,2)$。

评分标准：(1)(3)(4)(6)(8)(12)(13)(14)(18)(19)(21)(22) 各 3 分，(2)(4)(7)(11)(16)(17)(20) 各 2 分。